

الحساب

ظهرت العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) نتيجة وجود حياة اجتماعية أدت بدورها إلى ممارسة بيع وشراء وبناء منازل وتقسيم أراضي وحساب وقت.. وغيرها من الحاجات الحياتية.. " إن أول وأبسط العمليات الحسابية هي الجمع حيث أنه عملية ضم عناصر إلى شبيهاتها. وقد فكر الإنسان به حتما منذ أقدم العصور. فإذا كان لديه عشرة غنمات مثلاً وكان عند أخيه أو جاره ثمانية فلا بد أنه وجدها يوماً منسجمة سوية. وأدرك أن الموجود هو عدد أكبر من كل العددين وناتج من ضم العددين إلى بعضهما. ويأتي بعد ذلك مفهوم الفرق بين العددين. أي الطرح على أن يكون الناتج عدداً صحيحاً موجباً. وربما نشأت فكرة الطرح من العد في حالة الأرقام القريبة من مضاعفات العشرة. فإذا كانت الأعداد أصغر قليلاً من أعداد عشرية (أي مضاعفات العشرة) فإنه يبدو أن النظر إليها من أعلى أيسر من أن ينظر إليها من أسفل. فقولنا أن هذا العدد أقل من عشرين باثنين هو أيسر من قولنا ثمانية عشر أو أزيد من العشرة بثمانية. ومن هنا تنشأ فكرة الطرح. إن عمليات العد الأول كانت تتم بواسطة أعواد صغيرة أو أشياء أخرى كالحصى، واسمه في اللاتينية Calculi ومن هنا جاءت الكلمات (Calculus - Calculation) وفي اللغة العربية أحصى (من كلمة الحصى) وربما تمت عمليات العد بواسطة عقد في خيوط أو علامات محفورة في عصي طويلة.... هذا وقد استعمل الإنسان الأول الخيط في قياس مسافة ما وفي قسمتها إلى قسمين متساويين أو أكثر وذلك بطي الخيط مرتين أو أكثر ويبدو أن كل أمة اتفقت على اختيار وحدات جسم الإنسان المكتمل النمو كالذراع والقدم والشبر للأطوال. ولا يزال نجد آثار هذه الوحدات إلى الآن. " (هشام الطيار ويحيى سعيد())

• الحضارة المصرية القديمة

ظهرت الحاجة للرياضيات عندما واجه المصريون مشكلات مثل مسح الأراضي وتحديد معالم حدودها بعد أن يطمسها النيل بفيضانه كل عام.. وهذه أدت إلى حساب مساحات الأراضي وتقدير الضرائب عليها وقياس ارتفاع الماء في النهر العظيم .. وحساب الوقت لتحديد وقت فيضان النيل ومعرفة عدد أيام السنة والشهور (وقد كان حسابهم لأيام السنة ٣٦٥,٢٥ قريب من الصحيح ٣٦٥,٢٥٦٣٦).. احتاج المصريون للرياضيات في البناء فالأهرامات والمعابد ما هي إلا دليل على إبداعهم الهندسي ودقة حساباتهم.. " بني الهرم الأكبر حوالي عام ٢٩٠٠ ق.م. ومما لا شك فيه أن بناءه قد استند إلى قواعد من الرياضيات وهندسة المعمار. فتبلغ مساحة قاعدة الهرم حوالي ثلاثة عشر فداناً (٤٢٠٠ م^٢) ويحتوي على مليون صخرة متوسط وزن كل منها ٢,٥ طن (الطن = ٣١٦ كجم). وقد نقلت هذه الصخور عبر النيل بعد قطعها ووضعت في دقة تامة كل منها تجاور الأخرى. ويتكون سقف إحدى حجراته من

صخرة من حجر الجرانيت وزنها حوالي ٥٤ طنًا وطولها ٢٧ قدمًا. وبالرغم من ضخامة الأحجار التي بني بها الهرم فإن الخطأ النسبي في مقاييس جوانب الهرم يبلغ حوالي 0.000071429 وأن الخطأ النسبي في مقياس الزوايا القائمة بأركان الهرم يبلغ حوالي 0.000037. وصغر هذه الأخطاء يدل على أن المقاييس والهندسة والحسابات التي استخدمها المصريون كانت دقيقة للغاية. " (محمود شوق (١٤٠٩هـ))

"المصدر الأساسي لما نعرفه عن الرياضيات عند قدماء المصريين يتمثل في ورقتين من أوراق البردي أحدهما تسمى بردي رايند أو أحمس Rhind-Ahmes Papyrus في المتحف البريطاني مكتوبة حوالي سنة ١٩٥٠ ق.م. ، والأخرى بردي موسكو Golensitev مكتوبة حوالي سنة ١٩٠٠ ق.م. .. أما بقية المخطوطات فتحتوي على أجزاء متفرقة انطباعاتها كلها موجودة في ورقتي البردي الرئيسيتين. ومنها يتبين أن أول الإحصائيات الموجودة في التاريخ كانت في مصر القديمة. فمن أوائل الإحصائيات التي يذكرها التاريخ الإحصائية التي عملت في مصر سنة ٣٥٠ ق.م. لجمع المعلومات عن عدد السكان وثروة مصر لعمل الترتيبات الخاصة ببناء الهرم. وقد قام الملك رمسيس الثاني سنة ١٤٠٠ ق.م. بعمل تعداد لأراضي مصر لتقسيمها على أتباعه " (أ.د. نظلة خضر (١٩٨٤م))



بردي أحمس - 1

" استخدم قدماء المصريين رموزًا تدل على كل من عمليتي الجمع والطرح والتساوي. فرمزوا للجمع بصورة قدميين تسيران من اليمين إلى اليسار، والطرح بقدميين تسيران من اليسار إلى اليمين. أما التساوي فكانوا يرمزون إليه بالرمز = . وتميزت المسائل الحسابية التي تركها قدماء المصريين بالطابع العملي، وقليل منها يتعلق بمواقف نظرية. ففي صحيفة البردي التي توجد الآن في متحف موسكو يوجد حوالي ١١٠ مسألة معظمها عديدة وتعالج مشكلات عملية. " (محمود شوق (١٤٠٩هـ))

♣ الضرب عند قدماء المصريين

تختلف طريقة ضرب عددين عند المصريين في ذلك العصر عن الطريقة المتبعة الآن.. كان من السهل على المصريين أن يضاعفوا العدد أو يقسموا العدد إلى قسمين.. فإذا أرادوا مثلاً معرفة حاصل ضرب العدد ٣٥ في العدد ١٣ فإنهم يقومون بتشكيل عامودين كالتالي:

مضاعفات ١	مضاعفات ٣٥	
١	٣٥	*
٢	٧٠	
٤	١٤٠	*
٨	٢٨٠	*
١٣	٤٥٥	مجموع صفوف *

ولتوضيح الجدول السابق نجد أن هناك عامود يكون فيه مضاعفات العدد ٣٥ (أو العدد ١٣) وعامود آخر فيه مضاعفات العدد ١ (وهو عامود دائم لا يتغير عند ضرب أي عدد).. في العامود الأول نبدأ بالعدد ٣٥ ثم نضاعفه لنحصل على العدد ٧٠ ثم نضاعف العدد ٧٠ لنحصل على العدد ١٤٠ وهكذا... في العامود الثاني نبدأ دائماً بالعدد ١ ثم نضاعفه لنحصل على العدد ٢ ثم نضاعف العدد ٢ لنحصل على العدد ٤ ثم نضاعف العدد ٤ لنحصل على العدد ٨ ثم نقف هنا لأننا لو ضاعفنا العدد ٨ لنحصل على العدد ١٦ وهو أكبر من العدد ١٣ الذي نريد أن نضرب العدد ٣٥ به.. عندما نقف عن مضاعفة العدد ٨ في العامود الثاني فإننا أيضاً نقف عن مضاعفة العدد ٢٨٠ في العامود الأول.. الآن نبحث عن الأعداد التي يكون مجموعها العدد ١٣ في العامود الثاني ونضع عند كل عدد رمز النجمة.. ثم نجمع الأعداد المقابلة لها في العامود الأول لنحصل على العدد ٤٥٥ وهذا العدد هو حاصل ضرب العدد ٣٥ في العدد ١٣..

نلاحظ فيما سبق أن أساس الطريقة التي استخدمها المصريون هي مفهوم أن الضرب ما هو إلا تكرار العدد عدد من المرات.. أي في المثال السابق تكرار العدد ٣٥ ثلاثة عشر من المرات.. فنلاحظ من الجدول أن الأعداد في العامود الأول هي تكرار العدد ٣٥ عدد مرات ما يقابلها في العامود الثاني.. أي أن العدد ٧٠ في العامود الأول المقابل للعدد ٢ في العامود الثاني ما هو إلا تكرار العدد ٣٥ مرتين والعدد ٢٨٠ في العامود الأول المقابل للعدد ٨ في العامود الثاني ما هو إلا تكرار العدد ٣٥ ثمانية مرات.. وهكذا.. ولكي نحصل على حاصل ضرب العدد ٣٥ في العدد ١٣ (أي نحصل على العدد الذي يمثل تكرار العدد ٣٥ ثلاثة عشر من المرات) فإننا من الجدول نجد أن العدد ٢٨٠ هو تكرار العدد ٣٥ ثمانية مرات والعدد ١٤٠ هو تكرار العدد ٣٥ أربعة مرات والعدد ٣٥ هو

تكرار العدد ٣٥ مرة واحدة.. بالتالي مجموع تكرار العدد ٣٥ ثلاثة عشر من المرات هو مجموع الأعداد $٣٥ + ١٤٠ + ٢٨٠ = ٤٥٥$
حاصل الضرب.. ولمزيد من التوضيح أنظر الجدول التالي:

مضاعفات ٣٥	عدد التكرارات	
٣٥	١	*
$٣٥+٣٥$	٢	
$(٣٥+٣٥)+(٣٥+٣٥)$	٤	*
$(٣٥+٣٥+٣٥+٣٥) + (٣٥+٣٥+٣٥+٣٥)$	٨	*
٤٥٥	١٣	مجموع صفوف *

وهناك طريقة أخرى استخدمها المصريون في إيجاد حاصل ضرب عددين وهي عبارة عن مضاعفة عدد وتقسيم العدد الآخر إلى قسمين وإذا كان العدد المراد قسمته إلى نصفين عدد فردي فيطرح من العدد ١ ليصبح عدد زوجي يمكن قسمته إلى قسمين.. فمثلا حاصل ضرب العدد ٣٥ في العدد ١٣ يكون كالتالي:

أنصاف ١٣	طرح العدد ١	مضاعفات ٣٥	
١٣	١-	٣٥	*
٦		٧٠	
٣	١-	١٤٠	*
١	١-	٢٨٠	*
		٤٥٥	مجموع صفوف *

نلاحظ من الجدول أن العدد الذي اختير لتقسيمه إلى أنصاف هو العدد ١٣ (يمكن اختيار العدد ٣٥) والعدد الذي اختير لتضعيفه هو العدد ٣٥ (يمكن اختيار العدد ١٣).. يضاعف العدد ٣٥ كما هو في الطريقة السابقة.. وعند تقسيم العدد ١٣ نجد أنه عدد فردي فنطرح من العدد ١٣ واحد ليصبح العدد ١٢ ثم نقسمه إلى نصفين لنحصل على العدد ٦.. العدد ٦ يمكن تقسيمه إلى نصفين فنحصل على العدد ٣.. الآن نطرح من العدد ٣ واحد حتى نقسمه إلى نصفين فنحصل على العدد ١ (بعد عملية الطرح والقسمة)..

الآن نطرح من العدد ١ واحد لنحصل على الصفر عندها نقف وبالتالي نقف أيضاً عن مضاعفة العدد ٣٥ في عامود مضاعفات ٣٥..
ثم نجمع مضاعفات العدد ٣٥ المقابلة للأعداد الفردية (أي الأعداد التي تم طرح العدد واحد منها) نحصل على العدد ٤٥٥ حاصل ضرب العددين!!! لماذا الطريقة الثانية أعطت نتيجة صحيحة لحاصل الضرب؟؟ ما هو أساس هذه الطريقة؟؟

♣️ القسمة عند قدماء المصريين

علم قدماء المصريين أن القسمة هي عملية عكسية للضرب فكانت طريقتهم في القسمة مبنية على أساس أن ناتج القسمة هو عدد تكرارات المقسوم عليه للحصول على المقسوم.. ولشرح طريقتهم في القسمة نأخذ مثلاً قسمة العدد ٧٥٣ على العدد ٢٥.. هنا المقسوم عليه هو العدد ٢٥ فنضع مضاعفات العدد ٢٥ في عامود ومضاعفات العدد ١ في عامود آخر كما يلي:

مضاعفات المقسوم عليه	مضاعفات ١	
٢٥	١	
٥٠	٢	*
١٠٠	٤	*
٢٠٠	٨	*
٤٠٠	١٦	*
٧٥٠	٣٠	مجموع صفوف *
٣		الباقى

نلاحظ من الجدول أننا بدأنا بإيجاد مضاعفات المقسوم عليه العدد ٢٥ في العامود الأول ونستمر في إيجاد المضاعفات إلى أن نصل إلى عدد لو قمنا بمضاعفته نحصل على عدد أكبر من المقسوم.. أي في مثالنا هذا نقف عند العدد ٤٠٠ لأننا لو ضاعفنا العدد ٤٠٠ نحصل على العدد ٨٠٠ وهو أكبر من المقسوم العدد ٧٥٣.. وبالتالي نقف عند العدد ١٦ في العامود الثاني وهو العدد المقابل للعدد ٤٠٠.. الآن نحاول أن نحصل على المقسوم العدد ٧٥٣ من عامود مضاعفات المقسوم عليه.. نجد أن:

$$٧٥٠ = ٥٠ + ١٠٠ + ٢٠٠ + ٤٠٠ \quad \text{من العامود الأول}$$

$$٣٠ = ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ \quad \text{وما يقابله في العامود الثاني}$$

أي أن ناتج القسمة هو العدد ٣٠ (عدد التكرارات) والباقي هو العدد ٣.. وبمعنى آخر تكرار المقسوم عليه (العدد ٢٥) عدد ٣٠ من المرات نحصل على العدد ٧٥٠ وبإضافة العدد ٣ إلى العدد ٧٥٠ نحصل على العدد ٧٥٣ وهو المقسوم..

♣ الكسور عند قدماء المصريين

عبر المصريون في عصرهم عن جميع الكسور بكسور الوحدة الواحدة بحيث يأخذ فيها البسط العدد ١ ويأخذ المقام أي عدد (أنظر الجدول).. ومثال على تلك الكسور $1/4$ و $1/8$ و $1/432 \dots 1/n$.. ويطلق عليها أيضًا مقلوب العدد.. واستثنوا من هذه الكسور كسرين فقط وهما الكسر $2/3$ والكسر $3/4$ ولكن استعمال الكسر الأول $2/3$ كان أكثر شيوعًا.. رمزوا للكسر بإشارة $\overline{\text{IIII}}$ والتي تعني البسط (العدد ١) أما المقام فرمزوا له برموز الأعداد السابقة في حضارتهم.. فمثلا الكسر $1/7$ يرمز له بالرمز $\overline{\text{IIIIII}}$.. أما الكسر $1/2$ والكسر $2/3$ فكان لهما رمزان مختلفان وهما $\overline{\text{IIIIII}}$ و $\overline{\text{IIIIII}}$ على التوالي.. ولا يعبر المصريون عن الكسر بمجموع كسرين من نفس الوحدة الواحدة فعندهم لا يمكن التعبير عن الكسر $1/2$ أنه مجموع الكسرين $1/4$..

$2/9=1/5 + 1/45$	$=1/6+1/18$	
$2/7=1/4 + 1/28$		
$3/8=1/4 + 1/8$		
$2/5=1/3 + 1/15$		
$3/7=1/3 + 1/11 + 1/231$	$=1/4+1/7+1/28$	
$4/9=1/3 + 1/9$		
$5/9=1/2 + 1/18$		
$4/7=1/2 + 1/14$		
$3/5=1/2 + 1/10$		
$5/8=1/2 + 1/8$		
$5/7=2/3 + 1/21$	$=1/2 + 1/7 + 1/14$	
$3/4=2/3 + 1/12$	$=1/2 + 1/4$	
$7/9=2/3 + 1/9$		
$4/5=2/3 + 1/8 + 1/120$	$=1/2 + 1/5 + 1/10$	
$5/6=2/3 + 1/6$	$=1/2+1/3$	
$6/7=2/3 + 1/6 + 1/42$	$=2/3 + 1/7 + 1/21$	
$7/8=2/3 + 1/5 + 1/120$	$=2/3 + 1/8 + 1/12$	$=1/2+1/4+1/8$
$8/9=2/3 + 1/5 + 1/45$	$=1/2+1/3+1/18$	

بعض الكسور الموجودة في بردي أحمس..

The diagram consists of five rectangular blocks arranged horizontally. The first four blocks are identical: each is a vertical rectangle divided into two equal horizontal sections by a single line. The top section is filled with a solid orange color, and the bottom section is filled with a solid green color. The fifth block is a 2x4 grid of eight smaller squares. The left two columns of this grid are filled with the same orange color as the top sections of the first four blocks. The right two columns are filled with the same green color as the bottom sections of the first four blocks. This visualizes the process of decomposing four larger rectangles into a single grid of eight smaller squares.

$$5/8 = 1/2 + 1/8$$
$$\frac{T}{B} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

$$^{521}_{/1050} = ^1/_3 + R1$$

$$^{521}_{/1050} - ^1/_3 = ^{57}_{/350} = R1$$

الآن نكتب الكسر R1 بدلالة الكسور المصرية.. أي نبحت عن أكبر كسر مصري أقل من الكسر R1 .. نجد أن:

$$R1 = \frac{57}{350} = \frac{1}{7} + R2$$

ثم نوجد R2 وذلك بطرح الكسرين:

$$\frac{57}{350} - \frac{1}{7} = \frac{1}{50} = R2$$

نلاحظ أن الكسر R2 هو كسر مصري.. فنقف هنا عن البحث.. ويكون الكسر $\frac{521}{1050}$ بدلالة الكسور المصرية كالتالي:

$$\frac{521}{1050} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{50}$$

قد يتبادر إلى أذهاننا سؤال لماذا اعتمدت طريقة فيبوناتشي في البحث عن أكبر كسر مصري أقل من الكسر الأصلي.. لو لم نبدأ البحث عن أكبر كسر مصري.. أي لو فقط بحثنا عن كسر مصري أقل من الكسر الأصلي ليس بالضرورة أن يكون أكبر كسر مصري أقل منه.. فهل يمكننا أيضا بهذه الطريقة كتابة الكسر الأصلي بالكسور المصرية؟؟ دعونا نأخذ مثالا ونرى..

لو أخذنا كمثال الكسر $\frac{4}{5}$ وأردنا كتابته بدلالة الكسور المصرية.. نجد أن أكبر كسر مصري أقل منه هو الكسر $\frac{1}{2}$.. وبالقيام بالخطوات السابقة نجد أن:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + R$$

$$R = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + S$$

$$S = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

أي أن كتابة الكسر الأصلي بدلالة الكسور المصرية تكون على الشكل التالي:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

دعونا الآن نعبر عن نفس الكسر الأصلي ولكن نبدأ بأي كسر مصري (ليس بالضرورة أن يكون أكبرهم) أقل من الكسر الأصلي.. نعلم أن أكبر كسر مصري أقل من الكسر الأصلي هو الكسر $\frac{1}{2}$.. إذا دعونا نبدأ بالكسر $\frac{1}{3}$.. وبالقيام بالخطوات السابقة نجد أن:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{3} + R$$

$$R = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{4} + S$$

$$S = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{13}{60}$$

$$\frac{13}{60} = \frac{1}{5} + T$$

$$T = \frac{13}{60} - \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$$

أي أن كتابة الكسر $4/5$ بدلالة الكسور المصرية تأخذ الشكل التالي:

$$4/5 = 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/60$$

نلاحظ مما سبق أننا لو بدأنا بأي كسر مصري أقل من الكسر الأصلي فإنه باستطاعتنا التعبير عن الكسر الأصلي بدلالة الكسور المصرية.. الفارق الوحيد في الطريقتين هو أن خطوات إيجاد الكسور المصرية ستكون أقل لو بدأنا بأكبر كسر مصري..

نلاحظ أيضاً أن كتابة الكسر $4/5$ بدلالة الكسور المصرية أخذت شكلين مختلفين:

$$4/5 = 1/2 + 1/4 + 1/20$$

$$4/5 = 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/60$$

أي أن التعبير عن الكسور العادية بدلالة الكسور المصرية ليس تعبيراً وحيداً.. فيمكن أن يكون للكسر أكثر من تعبير..

أثبت فيبوناتشي أنه يمكن التعبير عن الكسور العادية بدلالة الكسور المصرية.. وبما أن الكسر المصري في حقيقته هو كسر.. فإننا نستطيع بنفس طريقة فيبوناتشي التعبير عن الكسر المصري بدلالة مجموعة كسور مصرية.. فمثلاً:

$$1/3 = 1/4 + 1/12$$

من هنا يمكننا القول أن عملية جمع الكسور المصرية في بعض الأحيان هي عملية مغلقة.. أي جمع الكسور المصرية هو كسر مصري.. دعونا الآن نبحث عن متى تكون عملية جمع الكسور المصرية مغلقة؟؟ نستعرض في الجدول التالي بعض عمليات الجمع المغلقة وغير المغلقة.. وسنحاول أن نجد النمط الذي تتبعه عمليات الجمع المغلقة..

العامود الأول	العامود الثاني
$1/5 + 1/20$	$1/3 + 1/12$
$1/10 + 1/90$	$1/6 + 1/7$
$1/156 + 1/182$	$1/12 + 1/18$
$1/10 + 1/15$	$1/7 + 1/14$

إذا قمنا بعملية الجمع للكسور في العامود الأول لوجدنا الناتج كسراً مصرياً.. أما ناتج جمع الكسور في العامود الثاني ليس كسراً مصرياً.. دعونا الآن نبحث عن نمط تتبعه كسور العامود الأول.. لو تأملنا الكسور في الصف الأول والثاني من العامود الأول نجد أن:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{90} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10 \times 9} = \frac{1}{9}$$

نلاحظ إذًا أن الصف الأول والثاني يتبع النمط التالي:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)n} = \frac{n+1}{(n+1)n} = \frac{1}{n}$$

وإذا تأملنا الكسور في الصف الثالث والرابع من العمود الأول نجد أن:

$$\frac{1}{156} + \frac{1}{182} = \frac{1}{26 \times 6} + \frac{1}{26 \times 7} = \frac{7+6}{26 \times 7 \times 6} = \frac{13}{26 \times 42} = \frac{1}{2 \times 42}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} = \frac{3+2}{5 \times 2 \times 3} = \frac{5}{5 \times 6} = \frac{1}{6}$$

نلاحظ إذًا أن الصف الثالث والرابع يتبع النمط التالي:

$$\frac{1}{a \times d} + \frac{1}{b \times d} = \frac{b+a}{d \times a \times b}$$

بحيث d تقبل القسمة على $b + a$

مما سبق يمكننا القول أن عملية جمع الكسور المصرية عملية مغلقة إذا كانت الكسور المصرية تتبع النمطين السابقين.. لو أعدنا كتابة علاقة النمط الأول بالشكل التالي:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)n}$$

نلاحظ أن أي كسر مصري يمكن كتابته كحاصل جمع كسرين مصريين باستخدام العلاقة السابقة..