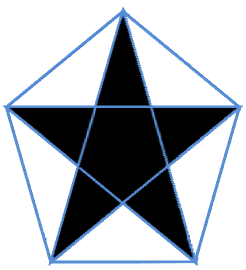
- ***الحضارة الإغريقية***

استخدم قدماء المصريين والبابليون الرياضيات لحل مشكلات المجتمع.. ولم يكن الاتجاه الأساسي عند كل منهما هو التفكير المجرد في الرياضيات.. يتجه المؤرخون إلى القول بأن بداية الرياضيات كنظام مجرد له أسسه من مسلمات ونظريات وتعاريف كانت في عهد الإغريق.. أهمل الإغريق الحساب البسيط واشتغلوا في التفكير الرياضي.. قد يكون السبب في ذلك أن العمليات الحسابية في نظامهم العددي كانت معقدة ومطولة.. اقتبسوا من البابليين الجداول الحسابية.. والصورة التالية تبين جدول الضرب لديهم..

واقتبسوا أيضًا من البابليين طريقة الضرب باستخدام مضاعفات العدد:

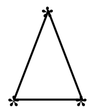
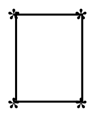
$$
\begin{aligned}
\sigma\pi\varsigma \cdot \beta &= (\sigma + \pi + \varsigma) \times \beta \\
&= (200 + 80 + 7) \times 2 \\
&= 400 + 160 + 14 = 574 \\
&= \phi o \delta
\end{aligned}
$$

من أهم المدارس التي نشأت في عهد الإغريق هي مدرسة فيثاغورس تحت قيادة العالم الرياضي فيثاغورس Pythagoras .. في هذه المدرسة بدأت عملية الفصل بين الحساب كعلاقات مجردة بين الأعداد وبين الحساب كتطبيقات.. من ينضم إلى هذه المدرسة يطلق عليه فيثاغوري.. ويتعهد أن يحتفظ بسرية تامة كل اكتشافات المدرسة.. كان الفيثاغوريون يمجدون الأعداد ويعتقدون أن الأعداد هي كل شيء.. أي أنها أساس كل شيء في هذا الكون وأن لها خواص سحرية.. وكان لديهم نظامًا معينًا في غذائهم فهم لا يأكلون اللحوم أو الفاصوليا.. شعارهم عبارة عن نجمة خماسية داخل مضلع خماسي:



تقاطع أقطار المضلع الخماسي (النجمة الخماسية) يولد أيضًا مضلع خماسي صغير ومقلوب.. وتقاطع أقطار المضلع الخماسي الصغير سيولد مضلع خماسي أصغر ومقلوب.. وهكذا لا نهائي.. يعتقد الفيثاغوريون أن هذا الشكل له خواص سحرية.. حيث أن نقطة تقاطع القطر مع أي من الأقطار الأخرى تقسم القطر إلى قطعتين مستقيمتين غير متساويتين.. فنسبة طول القطر إلى طول القطعة المستقيمة الطويلة دائمًا مساوية إلى نسبة طول القطعة المستقيمة الطويلة إلى طول القطعة المستقيمة القصيرة.. وهذه النسبة صحيحة لكل المضلعات الخماسية المتولدة من الشكل الأساسي.. تسمى هذه النسبة بنسبة الجمال Golden section وهي مساوية للعدد $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ..

اتجه الإغريق بالحساب اتجاها تجريديا.. حاولوا تعريف ما هي الوحدة الواحدة.. ثم عرفوا العدد.. حيث عرفه العالم طاليس بأنه مجموعة وحدات.. اعتبر الفيثاغوريون أن العدد يبدأ بالواحد (الوحدة).. وبتجميع الوحدات بعضها إلى بعض وحدة وحدة تزيد الأعداد.. كما أن تناقص الوحدات ينتهي بالعدد إلى الوحدة مرة ثانية.. تعود إلى فيثاغورس فكرة الأعداد المصورة Figured numbers فقد كان يستخدم الحصى كثيرًا في حساباته.. فإذا وضع حصاة واحدة على الأرض فهي تمثل العدد واحد وهي عبارة عن نقطة.. أما حصاتين فتمثل العدد 2 والشكل الذي يجمع بينهما هو خط مستقيم.. وثلاثة حصاة تمثل العدد 3 والشكل الذي يجمع بينهم هو المثلث.. وهكذا :

نقطة	*	العدد 1
خط مستقيم	*——*	العدد 2
مثلث		العدد 3
مستطيل (مربع)		العدد 4

ميز فيثاغورس بين الأعداد الزوجية والأعداد الفردية.. بعد تجارب حسابية كثيرة تتصل بعدد الحصى.. وجد فيثاغورس أنه إذا أمكن قسمة مجموعة الحصى إلى جزئين متساويين فعدد الحصى زوجي.. وإلا فهو فردي..

اتجهت مدرسة فيثاغورس إلى الكشف عن العلاقات بين الأعداد.. فاكتشفوا الأعداد المتحابة (أو الصديقة).. فقد سئل فيثاغورس مرة ما هو الصديق؟؟ فقال نفس ثانية.. فأطلقوا على العددين أنهما صديقين أو متحابين إذا كان كل عدد يمثل ناتج جمع قواسم العدد الآخر.. فمثلا العددان 220 و 284 عددان متحابان لأن قواسم العدد 220 (ما عدا العدد نفسه) هي:

220: 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110

ومجموعهم يعطي العدد 284 :

1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284

وقواسم العدد 284 هي:

284: 1,2,4,71,142

ومجموعهم يعطي العدد 220 :

1+2+4+71+142 = 220

واكتشفوا أيضا الأعداد التامة أو الكاملة Perfect numbers.. فالعدد الكامل هو العدد الذي يكون مجموع قواسمه (ما عدا العدد نفسه) مساويًا له.. مثلا العدد 6 هو عدد كامل لأن قواسمه هي 1,2,3 ومجموعهم هو العدد نفسه 6=3+2+1.. هذا التعريف للأعداد الكاملة أيضا عرفه العالم الإغريقي إقليدس Euclid في كتابه المشهور "الأصول Elements" ..

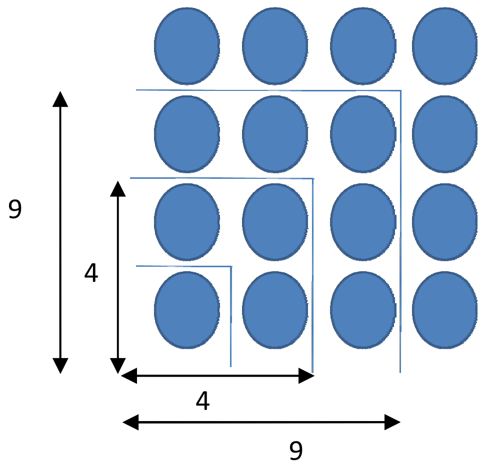
أنتج علماء الإغريق من تعريف العدد الكامل نوعين آخرين من الأعداد.. النوع الأول هو العدد الناقص (العدد دون التام) Defective number وهو العدد الذي يكون مجموع قواسمه أقل منه.. مثلا العدد 8 هو عدد ناقص لأن قواسمه هي 1,2,4 ومجموعهم هو العدد 7 أقل من العدد 8.. أما النوع الثاني هو العدد الزائد (العدد فوق التام) Over-Perfect number وهو العدد الذي يكون مجموع قواسمه أكبر منه.. مثلا العدد 12 هو عدد زائد لأن قواسمه هي 1,2,3,4,6 ومجموعهم هو العدد 16 أكبر من العدد 12..

عرف العالم نيكوماخوس Nicomachus أربعة أعداد تامة وقال بعدم وجود غيرها.. وهذه الأعداد هي 6, 28, 496, 8128 حيث قال بأن هناك واحدا منها فقط ضمن العشرة الأولى.. وواحد بين العشرة والمائة.. وواحد بين المائة والألف.. وواحد بين الألف والعشرة آلاف.. وجميعها تنتهي من اليمين بالعدد 6 أو 8.. أثبت علماء اليوم صحة ما قاله العالم نيكوماخوس بأن الأعداد التامة تنتهي بالعدد 6 أو 8 ولكن ليس بالضرورة أن تكون متناوبة.. فالعدد التام الخامس والعدد التام السادس ينتهيان من اليمين بالعدد 6.. وكذلك أثبتوا أن هناك أعداد تامة أخرى غير تلك الأربعة التي اكتشفها العالم نيكوماخوس.. ووضعوا لها صيغة أو قانون.. فقالوا إذا كانت n عددًا أوليًا وكان العدد $[(2^{n}) - 1]$ عددًا أوليًا فإن العدد التام يأخذ الشكل التالي:

$$Perfect\ no. = [(2^{n}) - 1] \times 2^{n-1}$$

وباستخدام القانون السابق أوجدوا العدد التام الخامس وهو العدد 33550336 حيث n = 13 والعدد $8191 = [(2^{n}) - 1]$ عددان أوليان..

وجد الفيثاغوريين أن الأعداد المربعة (أي الأعداد التي تكون مربع مثل 16,9,4....) هي مجموع متتابعة من الأعداد الفردية:



$$4 = 1 + 3$$

$$9 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

أهم ما اكتشفه العالم فيثاغورس هو نظريته المشهورة باسمه وهي أن مربع طول القطر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مربعي أطوال ضلعي المثلث.. ونسبت إليه لأنه برهن النظرية برهانًا نظريًا.. وضع فيثاغورس صيغة للأعداد التي تحقق نظريته وسميت بالأعداد الفيثاغورية:

$$n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$$

حيث n أي عدد طبيعي.. اعتقد الفيثاغوريون أن لكل رقم ميزة خاصة.. وأنه ليس هناك شيء في الكون إلا يمكن التعبير عنه برقم طبيعي بلا تقريب.. لكن... وجد الفيثاغوريون أن قطر المربع الذي ضلعه الوحدة الواحدة لا يمكن قياسه بالضبط.. لأن:

$$1^2 + 1^2 = (\text{القطر})^2$$

$$2 = (\text{القطر})^2$$

$$\sqrt{2} = \text{القطر}$$

و الجذر التربيعي للعدد 2 لا يمكن أن يكتب بشكل نسبة بين عددين طبيعيين.. فظهرت الأعداد اللانسبية أو اللامنطقية كما تدل على ذلك الترجمة الحرفية للكلمة اليونانية (a-logos) وهي الأعداد التي لا يمكن تقديرها تماما بدلالة أعداد أخرى.. وكان هذا الاكتشاف يعتبر نوعا من الفضيحة لعلم المنطق.. وبدأت المحاولات لإثبات أن الجذر التربيعي للعدد 2 هو عدد غير نسبي.. أثبت العالم الإغريقي أرسطو ذلك بالطريقة التالية:

لنفرض أنه يمكن تمثيل الجذر التربيعي للعدد 2 كعدد نسبي..

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

$$(\sqrt{2})^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2=\frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2=2(q^2)$$

نجد من العلاقة السابقة أن (مربع p) عدد زوجي.. بالتالي p عدد زوجي.. وبما أن p/q كسر أي ليس هناك قواسم مشتركة.. فإذا كانت p عدد زوجي.. فلابد أن تكون q عدد فردي.. الآن يمكننا أن نعبر عن p كعدد زوجي 2n في آخر علاقة وصلنا إليها:

$$(2n)^2=2\,(q^2)$$

$$4(n^2)=2\,(q^2)$$

$$2(n^2)=(q^2)$$

نجد من العلاقة السابقة أن (مربع q) عدد زوجي.. بالتالي q عدد زوجي.. ولكن q عدد فردي.. وهذا يؤدي إلى تناقض حيث أنه مستحيل أن يكون العدد زوجي وفردي في آن واحد.. إذا الجذر التربيعي للعدد 2 عدد غير نسبي..

بنفس طريقة الإثبات السابقة يمكن إثبات أن الجذر التربيعي للعدد 5 عدد غير نسبي وكذلك الجذر التربيعي للعدد 7 وهكذا...